数理解析研究所講究録
239巻 1975年 1-18

波動方程式に対する混合問題について

阪大理学部　井川 満

§1. はじめに。　1961年のC.N.R.S.のColloqueに於てS. Agmonは単独高階の双曲型方程式に対する混合問題について講演を行った（[3]）。その講演の中で今日"uniform Lopatinski condition"と呼ばれている所の方程式と境界作用素が満たすべき一つの条件を導入した。

Agmonの仕事を契期として双曲型方程式に対する混合問題が多くの人々によって研究されてきたが、それらは主として二つの方向をもっていた。

まず第一はAgmonが半空間定数係数について導いた結果を一般領域で変数係数の作用素にまで拡張することであり、第2は定数係数で半空間に制限する代りに、L² well posedな問題の特徴づけを行うということである。

第1の問題についてはまずBalaban[4]がある種の制限のもとにではあるが、ほぼ一般論を示すのに成功した。続いてKreiss[16]が一階systemに対して，Sakamoto[19]が単独高階

方程式に対して美しい結果を得た。

しかし uniform Lopatinski condition を満たさないものでかつ重要な問題の一つとして波動方程式に対して Neumann 条件を課したものがあるが、これは L^2 well posed な問題という枠組の中でとらえられている。この L^2 well posed な問題については Ikawa [8], Agemi [1], Miyatake [17], [18] 等の仕事があり、2階の方程式にかぎればほぼ解決されたといってよい。

第2の問題については Hersh [6], Agemi-Shirota [2], Chazarain-Piriou [5], Kasahara [14], Shirota [ ], Sakamoto [20] 等の仕事があり特に Sakamoto の仕事は $\mathscr{E}$ well posed の問題がきわめてすっきりと特徴づけられている。

本講演に於て、第1の問題と第2の問題のあいだのもの、すなわち必ずしも L^2 well posed ではない問題を一般領域の中で、あるいは変数係数の方程式について考えようとする場合の、2、3の基本的な事実を示して注意をしたいと思う。

この問題の中で一番典型的なものは、S を $\mathbb{R}^2$ の十分滑かな曲線で Ω を S を境界にもつ領域として、その時

$$\begin{cases} \square u(x,y,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x,y,t) \\ \qquad\qquad = f(x,y,t) \qquad \text{in } \Omega \times]0,T[\end{cases}$$

$$(1.1)\quad \begin{cases} Bu(x,y,t) = v_1(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y,t) + v_2(x,y)\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y,t) \\ \qquad\qquad = g(x,y,t) \qquad \text{on } S\times[0,T] \\ \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = u_1(x,y) \end{cases}$$

を考えるものである。ここで v_1, v_2 は S 上の real valued C^∞ function で

$$(1.2)\qquad v_1(x,y)\,n_1(x,y) + v_2(x,y)\,n_2(x,y) \neq 0 \qquad \text{on } S,$$

$n(x,y)=(n_1(x,y),\ n_2(x,y))$ は $(x,y)\in S$ での S の単位外法線とする，を満たすものとする。

$$\Omega_0 = \{(x,y)\ ;\ x>0,\ -\infty<y<\infty\}$$

とおき (1.1) の Ω を Ω_0 におきかえ，v_1, v_2 を実定数とした問題を $(1.1)_0$ とかくと (1.2) は $v_1 \neq 0$ と同等である。$(1.1)_0$ は $v_1=1,\ v_2=0$ であれば Neumann condition となるから，L^2 well posed であるが、$v_1\neq 0,\ v_2\neq 0$ であれば L^2 well posed ではないことがわかっている[7]. 勿論 $\mathcal{E}$ well posed である。(Inoue[13], Tsuji[21])。

よって (1.1) の問題は (1.2) の条件のもとでは $s_0\in S$ を勝手にとる時 s_0 における S の接線によってつくられる半空間で

の，境界作用素をBの係数をs_0での値に固定したものにとる定数係数半空間の問題は$\mathcal{E}$ well posed であることがわかる。

それでは(1.1)の問題は(1.2)が満たされておれば$\mathcal{E}$ well posed であろうか。Ikawa[9]によって

$$(1.3) \qquad v_1(x,y)\,n_2(x,y) - v_2(x,y)\,n_1(x,y) \neq 0 \quad \text{on } S,$$

すなわちBの微分の方向が常に oblique であれば$\mathcal{E}$ well posed である事が示された。(1.3)が満たされていない場合はどうであろうか。$v_1 n_2 - v_2 n_1 \equiv 0$ であれば Neumann 条件であり$\mathcal{E}$ well posed である。それでは残りの場合，すなわちBの微分の方向が滑かに oblique から normal へ変るような場合はどうであろうか。そのような時は必ずしも$\mathcal{E}$ well posed であるとはいえない。次のような例がつくれる。

<u>例1.</u>　$\mathbb{R}^2$のC^∞ simple, convex な閉曲線SとS上のC^∞ real valued functions $v_1(x,y)$, $v_2(x,y)$で(1.2)を満すもので，ΩをSの内部領域ととると，混合問題(1.1)は$\mathcal{E}$ well posed ではないようなものが構成出来る。

この例の構成は oblique derivative boundary condition で支配される波の反射の特性を用いると極く簡単に出来る。その方法を以下の節で示すことにする。その構成法からもう

かがえる事であるが、必ずしも L^2 well posed でない問題を一般領域で扱う場合、境界作用素と領域の幾何学的性質が深く関係し合う事がわかる。領域の幾何学的性質が問題の well posedness を決めるのに関係するという事は L^2 well posed の問題の枠内では見られなかった特徴である。

例1の構成に於て、上にすでに述べたことではあるが、常に oblique あるいは常に Neumann というものは $\mathcal{E}$ well posed であるから、必然的に例1となる v_1, v_2 は（S がきれいな曲線であったとしても）複雑なふるまいをしなければならない。しかし $\mathbb{R}^3$ での領域で考えると、境界の各点で考えた定数係数半空間の問題は $\mathcal{E}$ well posed であるが、その領域では $\mathcal{E}$ well posed でない例はもっとすっきりした形で書ける。

例2

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ x^2 + y^2 = 1,\ \ |z| \leq 1\}$$

とおき，S を S_0 を含む C^∞ で compact で convex な曲面とする。Ω をその内部領域とし、$v_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, は S 上の C^∞ real valued functions で S_0 上で

$$(1.4)\qquad \begin{cases} x_1 v_1 + x_2 v_2 = a \neq 0 \\ x_1 v_2 - x_2 v_1 = b \\ v_3 = c \end{cases}$$

a, b, c は実数，が成り立っているとする。その時

$$B = v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + v_3\frac{\partial}{\partial z} + d\frac{\partial}{\partial t}$$

とおくとき，ある実数 d に対し

$$d(x,y,z) = d \qquad \text{on } S_0$$

であれば

$$\sqrt{b^2+c^2} > d \geqq -\sqrt{b^2+c^2}, \quad c^2+d^2 \neq 0 \tag{1.5}$$

であれば混合問題

$$\begin{cases} \Box u(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) & \text{in } \Omega\times]0,T[\\ B\,u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t) & \text{in } S\times]0,T[\\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = u_1(x,y,z) \end{cases}$$

は L^2 well posed ではない。

上の例でもわかるように必ずしも L^2 well posed ではない問題を一般領域で考えると境界の各点で Lopatinski 条件が満たされているだけでは L^2 well posed にはならないので，領域の幾何学的性質がかかわってくるが、一方 (1.3) に対応する十分に広い class、すなわち境界上の各点での性質より，領域の形の如何にかかわらず L^2 well posed である，という問題の class をとり出すことが出来る（Ikawa[11]）。

§2. Oblique derivative boundary condition による波の反射

(2.1) $$B=-\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}-d\frac{\partial}{\partial t}, \quad b, d : \text{real constants}$$

として、領域を $\mathbb{R}^2_+=\{(x,y);\ x>0,\ -\infty<y<\infty\}$ ととって $(Bu)(0,y,t)=0$ なる境界条件のもとで、波が反射するときどのような現象が起るかを調べる。この考察は解の幾何光学的性質を考慮に入れると oblique derivative boundary condition の問題を考察する場合領域の形がどのような役割をはたすかの一端が理解出来る。

__定義__. Dをある領域とするとき, $S^p(D)$ は parameter $k\geq 1$ をもつDで定義されたC^∞函数 $w(\cdot\,;k)$ で $\{k^p w(\cdot\,;k);\ k\geq 1\}$ が $C^\infty(D)$ で有界集合になるものの全体とする。

実数 ω, $|\omega|<1$ が

(2.2) $$-\sqrt{1-\omega^2}+b\omega+d=0$$

(2.3) $$b+d\omega\neq 0$$

を満たしているとする。[1)]

1) $d\neq 1$ かつ $-|b|<d\leq\sqrt{b^2+1}$ であれば (2.2), (2.3) を満たすωが存在する。

$$(2.4)\qquad \varphi^{\pm}(x,y,t;k)=\pm k\sqrt{1-\omega^2}\,x+(\omega k+\sqrt{k})y-(k+\omega\sqrt{k})t$$

$$(2.5)\qquad \varphi_0(y,t;k)=(\omega k+\sqrt{k})y-(k+\omega\sqrt{k})t$$

とおく。

$$h(y,t;k)\in S^0(\mathbb{R}^2)$$

に対し

$$(2.6)\qquad g(y,t;k)=\exp(i\varphi_0)\cdot k^{p}\,h(y,t;k)$$

とおこう。又 $P=(x_0,y_0,t_0)\in\mathbb{R}^3$ に対し

$$L^{\pm}(P)=\{(x,y,t)\,;\ x=x_0\pm\sqrt{1-\omega^2}\,l,\ \ y=y_0+\omega l,\ \ t=t_0+l,\quad -\infty<l<\infty\}$$

とおく。その時次の命題をうる。

__命題 2.1.__ (2.6) の $g(y,t;k)$ に対し

$$u^{\pm}(x,y,t;k)=\exp(i\varphi^{\pm})\,k^{p^{\pm}}\,v^{\pm}(x,y,t;k),$$
$$v^{\pm}(x,y,t;k)\in S^0(\overline{\mathbb{R}^3_+}),$$

$$(2.7)\qquad p^{+}=p-\frac{1}{2},\qquad p^{-}=p-1,$$

の形のもので、次の性質をもっているものがつくれる：

$$(2.8)\qquad \Box u^{\pm}\in S^{-\infty}(\overline{\mathbb{R}^3_+}),$$

$$(2.9)\qquad Bu^{\pm}-g\in S^{-\infty}(\mathbb{R}^2),$$

(2.10) $\quad \operatorname{supp} u^{\pm} \subset \{ L^{\pm}(P) ;\ P \in \{(0,y,t) ; (y,t) \in \operatorname{supp} h\}\},$

(2.11) $$\liminf_{k\to\infty} | v^{\pm}(\pm\sqrt{1-\omega^2}\,l,\ y_0+\omega l,\ t_0+l\,;k)|$$
$$= C^{\pm} \liminf_{k\to\infty} |h(y_0,t_0\,;k)|,$$

ここで $C^{+} = |b+d\omega|^{-1}$, $C^{-} = (2\sqrt{1-\omega^2})^{-1}$ である。

証明.

(2.12) $$v^{\pm} = \sum_{j=0}^{\infty} k^{-\frac{j}{2}} v_j^{\pm}, \quad v_j^{\pm} \in S^0(\overline{\mathbb{R}^3_+})$$

とおくと，$\square u^{\pm} = 0$ が k に関して asymptotic に満たされるためには

$$H^{\pm} = \pm\sqrt{1-\omega^2}\frac{\partial}{\partial x} + \omega\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}$$
$$K = \frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial y}$$

とすると，$x>0$ において，

(2.13)$^{\pm}$ $$H^{\pm} v_0^{\pm} = 0$$

(2.14)$^{\pm}$ $$H^{\pm} v_1^{\pm} + K v_0^{\pm} = 0$$

(2.15)$^{\pm}$ $$H^{\pm} v_j^{\pm} + K v_{j-1}^{\pm} - i\square v_{j-2}^{\pm} = 0, \quad \forall j \geq 2$$

が成り立てばよい。

一方 $Bu^{\pm} - g = 0$ が asymptotic に成り立つためには、

(2.2), (2.3) を考慮すると $p^- = p-1$ として

$$(2.16) \qquad (i\,2\sqrt{1-\omega^2})\,v_0^-(0,y,t;k) = h(y,t;k)$$

$$(2.17) \qquad 2\sqrt{1-\omega^2}\cdot v_1^-(0,y,t;k) + (b+d\omega)\,v_0^-(0,y,t;k) = 0$$

$$(2.18) \qquad (2\sqrt{1-\omega^2}\,v_j^- + (b+d\omega)\,v_{j-1}^- - iB\,v_{j-2}^-)(0,y,t;k) = 0 \qquad j \geq 2,$$

が成り立てばよい。又 u^+ に関しては

$$(2.19) \qquad v_0^+(0,y,t;k) = -i(b+d\omega)^{-1}h(y,t;k)$$

$$(2.20) \qquad v_j^+(0,y,t;k) = -i(b+d\omega)^{-1}\cdot(B\,v_{j-1}^-), \quad j \geq 1$$

が成り立てばよい。よって (2.13)〜(2.20) によって $v_j^\pm$ を逐次構成出来る。その $v_j^\pm$ より (2.12) が asymptotically に成り立つように $v^\pm$ をえらぶと (2.8), (2.9) の成り立つことは直ちに従う。

(2.10), (2.11) は $v_j^\pm$ の構成法，すなわち 1 階微分作用素 $H^\pm$ の解の性質より従う。

今 $h(y,t;k) = h_0(y,t)$ とし $h_0(y,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ は、

$$\begin{cases} \operatorname{supp} h_0 \subset \{(y,t)\,;\ |y|<1,\ 1<t<2\} \\ \sup h_0 = 1 \end{cases}$$

を満たすものを一つとり命題2.1によって $u^\pm(x,y,t;k)$ をつくり

$$u(x,y,t;k) = u^+(x,y,t;k) - u^-(x,y,t;k)$$

とおこう。明らかに

$$\begin{cases} \Box u \in S^{-\infty}(\overline{\mathbb{R}^3_+}) \\ \mathcal{B}u\big|_{x=0} \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

が成り立つ。一方(2.10)より

$$u(x,y,t;k) = -u^-(x,y,t;k) \qquad \text{for } t<1$$

$$u(x,y,t;k) = u^+(x,y,t;k) \qquad \text{for } t>2 .$$

よって (2.7), (2.11) より

$$\| u^-(x,y,0;k)\|^2_{1,L^2(\mathbb{R}^3_+)} + \left\|\frac{\partial u^-}{\partial t}(x,y,0;k)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_+)} \leq C,$$

かつ $t \geq 2$ に対して，k：十分大に対し

$$C_1 k^{\frac{1}{2}} \geqq \| u^+(x,y,t;k)\|^2_{1,L^2(\mathbb{R}^3_+)} + \left\|\frac{\partial u^+}{\partial t}(x,y,t;k)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_+)} \geqq C_0 k^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。すなわち入射波 u^- が境界条件 $\mathcal{B}u|_{x=0}=0$ で反射するとき，その反射波の energy は振動数の 1/2 乗の order で増大してゆくことがわかる。

§3. $P_0P_1P_2\cdots\cdots P_{n-1}$ を辺の長さが δ の正 n 角形とする。Q_j, R_j, $j=0,1,2,\ldots,n-1$, を P_jP_{j+1} を三等分する点とする。

折れ線 $R_j P_{j+1} Q_{j+1}$ を適当な C^∞ 曲線でおきかえて $Q_j R_j$, $j=0,1,2,\ldots,n-1$ を含む C^∞ で convex な閉曲線をつくり、それを S とし、その内部領域を Ω としよう。

S 上の real valued C^∞ functions $v_1(x,y)$, $v_2(x,y)$ を

$$(3.1) \qquad v_1^2 + v_2^2 = 1 + \tan^2(\pi n^{-1})$$

$$(3.2) \qquad (v_1 n_2 - v_2 n_1)(v_1 n_1 + v_2 n_2)^{-1} = \tan(\pi n^{-1})$$

となるように選ぶと、混合問題 (1.1) の解で

$$(3.3) \qquad \| u(x,y,t;k)\|^2_{L^2(\Omega)} \geqq k^{N(t)} \Big\{ \| u(x,y,0;k)\|^2_{1,L^2(\Omega)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0;k)\Big\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Box u\|^2_{L^2(\Omega\times]0,t[)} + \|Bu\|^2_{1,L^2(S\times]0,t[)}\Big\}, \qquad \forall t \geqq 0,$$

$$(3.4) \qquad N(t) = 2t \Big/ \delta\cos\frac{\pi}{n} \; -2$$

を満たすような $u(x,y,t;k)$ が存在する。

このような u の構成は、例えば P_0 が原点, P_1 が y 軸上にあるとして, support を Q_0R_0 上にもつ函数

$$g(y,t;k) = \exp\Big\{ik\Big(\cos\frac{\pi}{n} + \sqrt{k}\Big)y - i\Big(k + \cos\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{k}\Big)t\Big\}\, h_0(y,t)$$

をとり、

$$Bu_0^+ - g \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^2) \qquad \text{on} \quad Q_0R_0$$

ととり、命題2.1を用いながら、順次 u_0^+ から出発して波を壁で反射させてゆけばよい。Q_1R_1 で反射した波を u_1^+, Q_2R_2 で u_1^+ が反射した波を u_2^+ とし, 以下 $u_2^+, u_3^+, \cdots\cdots$ をつくり

$$u = \sum_{j\geq 0} u_j^+$$

とおくと, この u が (3.3) の性質を満している事は前節での反射の考察をくり返し用いる事より従う。

§4. 例1の構成の方針

(3.3), (3.4) よりわかるように δ が小さければ小さい程、(1.1) の解の energy は速く増大する。ゆえに一定時間のうちに任意回数の energy を増大させるような反射が可能な領域と境界作用素をつくればよい。

$n \geq 3$ に対し折れ線 $P_{n0}P_{n1}\cdots\cdots P_{nn-1}P_{nn}$ を

$$\overline{P_{ni}P_{ni+1}} = \delta_n = n^{-3}, \quad i=1,2,\ldots, n-1$$

$$\angle P_{ni}P_{ni+1}P_{ni+2} = \pi - \theta_n = \pi - C_n^{-1} n^{-3n}$$
$$i=1,2,\ldots, n-2,$$

を満たすようにとろう。Q_{ni}, R_{ni}, $i=0,1,2,\ldots,n-1$ を辺 $P_{ni}P_{ni+1}$ を3等分する点とし、折れ線 $R_{ni}P_{ni+1}Q_{ni+1}$ を適当な C^∞ 曲線でおきかえて, $Q_{ni}R_{ni}$ $i=0,1,2,\ldots,n-1$ を含む C^∞ 曲線を Γ_n としよう。

次に Γ_n と Γ_{n+1} を以下の仕方で結びつける。$P_{n+1\,0}$ と P_{nn} を重ね, $Q_{n+1\,0}$ 線分 $R_{nn-1}P_{nn}$ の P_{nn} の側に延長した上にあるようにし, かつ Γ_n と Γ_{n+1} は $R_{nn-1}P_{nn}$ によって決められる直線の同じ側にあるようにする。

この仕方で Γ_i, $i=3,4,5,\ldots$ をつなぎ合せてゆくと, Γ_n の長さ $\leq n^{-2}$, $\sum_{i=n_0}^{\infty} i\theta_i < \frac{\pi}{2}$ (n_0 を大きくとると) であるから $\bigcup_{i=n_0}^{\infty} \Gamma_i$ は有限の長さをもつ単純曲線となる。これを Γ その長さを l とかこう。この Γ を含むような C^∞ で simple で convex な閉曲線の一つを S とし、その内部を Ω とする。

$v_1, v_2 \in C^\infty(S)$ を

$$v_1^2 + v_2^2 = 1 \quad \text{on } S$$

$$(4.1) \qquad (v_1 n_2 - v_2 n_1)(v_1 n_1 + v_2 n_2)^{-1} = \tan\frac{\theta_n}{2} \quad \text{on } \Gamma_n \ \forall n \geq n_0$$

となるようにとる。これは Γ_i のつくり方より可能である。

このようにしてつくられた B, Ω が例1として適っている事は次の補題を認めれば従う。この補題の証明は §3 での論証を用いればよい。

補題4.1. (4.1) が成り立っているとする。$k \geq 1$ を parameter にもつ函数 $u(x, y, t; k) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times]-\infty, \infty[)$ で次の性質をもつものがある：

$$\square u \in S^{-\infty}(\bar{\Omega} \times]-\infty, \infty[)$$

$$\mathrm{supp}\, u \subset \bar{\Omega} \times [0, \infty[$$

$$(4.2) \quad \|Bu(x, y, t; k)\|_{\mathcal{B}^m(S \times]-\infty, T_n])} \leq C_m k^m,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots,$$

かつ十分大きな k に対しては

$$(4.3) \quad \sup_{\Omega \times]-\infty, T_n]} |u(x, y, t; k)| \geq k^{\frac{1}{2}(n-1)},$$

ここで

$$T_n = \left(n - \frac{3}{2}\right) \delta_n \cdot \cos \frac{\theta_n}{2}$$

とおく。

この補題とを well posed の定義とを考え合せると上の B, Ω が例1に適うことがわかる。実際 well posed とすると任意の multi-index α に対しある整数 $p(\alpha)$ があって

$$(4.4) \quad \sup_{\Omega \times [0, t_0]} |\partial^\alpha u| \leq C_{T, \alpha} \left\{ \|u_0\|_{\mathcal{B}^{p(\alpha)}(\bar{\Omega})} + \|u_1\|_{\mathcal{B}^{p(\alpha)}(\bar{\Omega})} \right.$$

$$\left. + \|\square u\|_{\mathcal{B}^{p(\alpha)}(\bar{\Omega} \times (0, t_0))} + \|Bu\|_{\mathcal{B}^{p(\alpha)}(S \times (0, t_0))} \right\}$$

が $\forall\, t_0 \in [0, T]$ に対して成り立つ。$p(0,0,0) = p_0$ とし $n \geqq n_0$ かつ

$$
(4.5) \qquad n \geqq 2p_0 + 3
$$

$$
T_n = \left(n - \frac{3}{2}\right) \delta_n \cos\frac{\theta_n}{n} < T
$$

となるように n を大きくして固定し，補題4.1を適用すると (4.3) より (4.4) の左辺は $\geqq k^{\frac{1}{2}(n-1)}$，一方 (4.2) と support の考察より (4.4) の右辺は $\leqq C k^{p_0}$ $\quad \forall k \geqq 1$ である.

よって

$$
k^{\frac{1}{2}(n-1)} \leqq C k^{p_0} \qquad \forall k \geqq 1,
$$

であるがこれは (4.5) より不可能である。よって示された。

§5. おわりに.

例2に関しても、基本となる考え方は全く同様である。ただ S_0 から境界と一定の角をなす波を出すと caustic をもつので，それに対応した解の表現式を用いねばならない。それは、Ludwig [15] によった。それと共に (1.5) の条件のもとでは (2.2), (2.3) に対応する条件をみたす波の方向が、たくさんあり，境界にいくらでも近いものをみつけることが出来る ($\mathbb{R}^2$ の場合は不可能) という事実をつかう。この証明は [12] に詳しくのべられている。

文 献

[1] R.Agemi, On energy inequalities of mixed problems for hyperbolic equations of second order, J.Fac.Sci. Hokkaido Univ.,Ser.I,23(1971),221-236.

[2] R.Agemi and T.Shirota, On necessary and sufficient conditions for L^2-well posedness of mixed problems for hyperbolic equations, I and II, ibid, 21(1970),133-151 and 22(1972),137-149.

[3] S.Agmon, Problème mixte pour les équations hyperboliques d'ordre supérieur, Colloque International du C.N.R.S., (1962), 13-18.

[4] T.Balaban, On the mixed problem for a hyerbolic equation, Mem.Amer.Math.Soc., N^{o} 112(1971).

[5] J.Chazarain et A.Piriou, Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés, à paraître.

[6] R.Hersh, Mixed problems in sevral variables, J.Math. Mech.,12(1963), 317-334.

[7] M.Ikawa, On the mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, Proc. Japan Acad., 44(1968),1033-1037.

[8] ———, On the mixed problem for hyperbolic equations with the Neumann boundary condition, Osaka J.Math., (1970),203-223.

[9] ———, Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition, Osaka J.Math., 7(1970),495-525.

[10] ———— , Remarques sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, Colloque international du C.N.R.S., (1972), astérisque 2 et 3, 217-221.

[11] ———— , Problèmes mixtes pas nécessairement L^2-bien posés pour les équations strictement hyperboliques, à paraître

[12] ———— , Sur les problèmes mixtes pour l'équation des ondes, à paraître.

[13] A.Inoue, On the mixed problem for the wave equation with an oblique boundary condition, J.Fac.Sci.Univ. Tokyo,16(1970),313-329.

[14] K.Kasahara, On weak well-posedness of mixed problems for hyperbolic systems, Publ.R.I.S.M. Kyoto Univ., 6(1970),503-514.

[15] D.Ludwig, Uniform asymptotic expansions at a caustic, Comm.Pure Appl.Math., 19(1966),215-250.

[16] H.O.Kreiss, Initial-boundary value problems for hyperbolic systems, Comm.Pure Appl.Math.,23(1970),277-298.

[17] S.Miyatake, Mixed problem for hyperbolic equation of second order,J.Math.Kyoto Univ.,13(1973),435-487.

[18] ———— , Mixed problems for hyperbolic equations of second order with first order complex boundary operators, to appear.

[19] R.Sakamoto, Mixed problems for hyperbolic equations, I and II,J.Math.Kyoto Univ.,8(1970),349-373,403-417.

[20] ———— , $\mathcal{E}$-well-posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J.Math.Kyoto Univ., 14(1974),93-118.

[21] M.Tsuji, Characterization of the well-posed mixed problem for wave equation in a quarter space, Proc.Japan Acad.(1974).